
KREUZPRODUKT UND DREHUNGEN

Das Kreuzprodukt tritt in vielen physikalischen Größen auf, die mit Drehungen zu tun haben.

[H7] *Drehungen* **[$2+2+1+5^* = 5+5^*$ Punkte]**

Eine Drehung $D_{\alpha\vec{n}}$ ist eindeutig durch Angabe einer Drehachse $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$, und eines Drehwinkels α bestimmt. Ein beliebiger Vektor $\vec{u}$ lässt sich bezüglich $\vec{n}$ immer schreiben als $\vec{u} = \vec{u}_\parallel + \vec{u}_\perp$, wobei $\vec{u}_\parallel = \vec{n}\cdot(\vec{n}\cdot\vec{u})$ und $\vec{u}_\perp = \vec{u} - \vec{u}_\parallel$ ist, siehe [P4](b). Damit ist die Drehung

$$D_{\alpha\vec{n}}\vec{u} = \vec{u}_\parallel + \cos(\alpha)\vec{u}_\perp + \sin(\alpha)(\vec{n}\times\vec{u})\,.$$

Hinweis: Doppelte Punktzahl (10 statt 5) bei vollständiger Bearbeitung in Index-Notation!

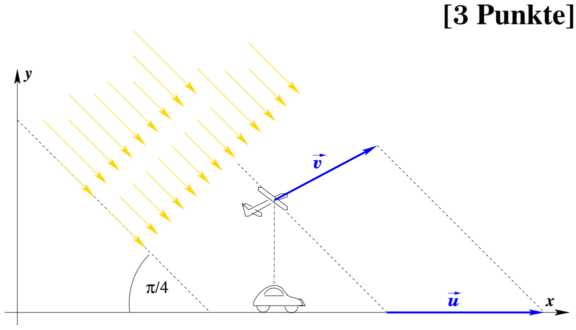
(a) Berechnen Sie $D_{\alpha\vec{n}}\vec{e}_i$, $i = 1,2,3$, für die Basisvektoren der Standardbasis.

(b) Zeigen Sie, dass das Spatprodukt $\epsilon_{ijk}\,(D_{\alpha\vec{n}}\vec{e}_1)_i(D_{\alpha\vec{n}}\vec{e}_2)_j(D_{\alpha\vec{n}}\vec{e}_3)_k = \epsilon_{ijk}(\vec{e}_1)_i(\vec{e}_2)_j(\vec{e}_3)_k = 1$ ist.
Hinweis: Beachten Sie, dass Sie $D_{\alpha\vec{n}}\vec{e}_i = (1-\cos(\alpha))\vec{e}_{i,\parallel} + \cos(\alpha)\vec{e}_i + \sin(\alpha)(\vec{n}\times\vec{e}_i)$ schreiben können. Überlegen Sie, welche der 27 Spatprodukte von vorne herein verschwinden.

(c) Es sei $\vec{b}$ ein beliebiger Vektor, der senkrecht zur Drehachse stehe. Dann sei $\vec{b}' = D_{\alpha\vec{n}}\vec{b}$ der gedrehte Vektor. Berechnen Sie den Drehwinkel aus dem Skalarprodukt $\vec{b}'\cdot\vec{b}$.

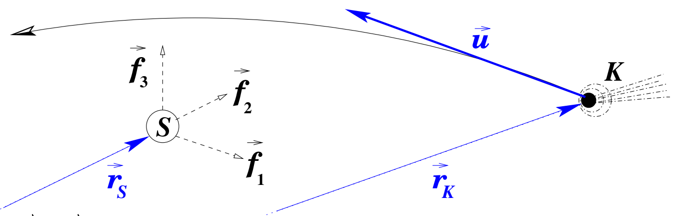
[H8] *Noch ein Flug in der Abendsonne* **[3 Punkte]**

Auf der Rückfahrt vom Flughafen bleiben wir mit $120\,\mathrm{km/h}$ genau unter einem startenden Flugzeug, während sein Schatten (bei Sonnenlicht-Einfall unter $\pi/4$) mit $170\,\mathrm{km/h}$ über die Straße gleitet. Welche Geschwindigkeit v hat das Flugzeug? Wieviel Meter gewinnt es pro Sekunde an Höhe?
Hinweise: Dieses Problem ist zweidimensional. Die Beziehung zwischen $\vec{v}$ und $\vec{u}$ findet man durch geschickte Projektion.



[H9] *Komet* **[$2+1+1+1+1+1 = 7$ Punkte]**

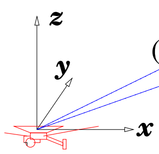
Die ESO wird in Kürze Ort $\vec{r}_K$ und Geschwindigkeit $\vec{u}$ eines Kometen bekannt geben – beide Angaben bezogen auf das Koordinatensystem einer Raumsonde (deren Teleskop den Kometen entdeckt hat), in welchem die Sonne (idealisiert punktförmig mit Masse $\gg$ Kometenmasse) einen festen Ort $\vec{r}_S$ hat.



(a) Konstruieren Sie eine Basis $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ so, dass $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ die Ebene durch die Sonne aufspannen, in welcher sich der Komet bewegt. Dabei sei $\vec{f}_1$ parallel zu $-\vec{u}$, und $\vec{f}_2$ zeige zur Kometenbahn. Überlegen Sie dazu, wie weit und durch welche Gleichungen $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ bis hierher festgelegt sind. Bezeichnen Sie zweckmäßig mit $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_u$ die Einheitsvektoren von S zu K bzw. in $\vec{u}$-Richtung.

(b) Als welche Linearkombinationen der $\vec{f}_i$ kann man nun $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_u$ darstellen?

(c) In welchem minimalen Abstand d_∞ fliegt der Komet an der Sonne vorbei, falls wegen seiner hohen Geschwindigkeit die Anziehung durch die Sonne vernachlässigt werden darf?



(d) Wenn wir die Gravitationswechselwirkung einbeziehen, dann gilt in einem sonnenzentrierten Koordinatensystem, dass der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r}\times(m\vec{v})$ zeitlich konstant ist. Damit lässt sich eine recht einfache Beziehung zwischen dem minimalen Abstand d_0 des Kometen von der Sonne und seiner maximalen Geschwindigkeit v_0 herleiten. Hierbei bezeichnet $\vec{r}$ den Vektor von S zu irgendeinem Punkt der Kometenbahn, und $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Kometen beim Durchfliegen eben dieses Punktes. Die Berechnung von $\vec{L}$ ergibt dabei für jedes $\vec{r}$ immer den gleichen Vektor.

(e) Ab jetzt stehen die Daten zur Verfügung: $\vec{r}_S \doteq (3,2,3)$LE, $\vec{r}_K \doteq (4,2,3)$ LE und $\vec{u} \doteq (-1,2,2)$ GE in unwichtigen Einheiten LE und GE. Es ergab sich $d_0 = \frac{14}{15}$ LE. Welche Geschwindigkeit v_0 erreicht also der Komet maximal? War die Näherung in (c) akzeptabel? Betrachten Sie dazu $\frac{d_\infty - d_0}{d_0}$.

(f) Geben Sie die Komponenten der Vektoren $\vec{e}_r$, $\vec{u}$ und der $\vec{f}_i$, $i = 1,2,3$, zahlenmäßig an. Überprüfen Sie, dass die Basis $\vec{f}_i$ orthonormal ist, und dass die Linearkombination für $\vec{e}_r$ aus (b) stimmt.

HINWEIS: Name, Vorname, und Matrikelnummer angeben! Lösungen bitte zusammenheften!